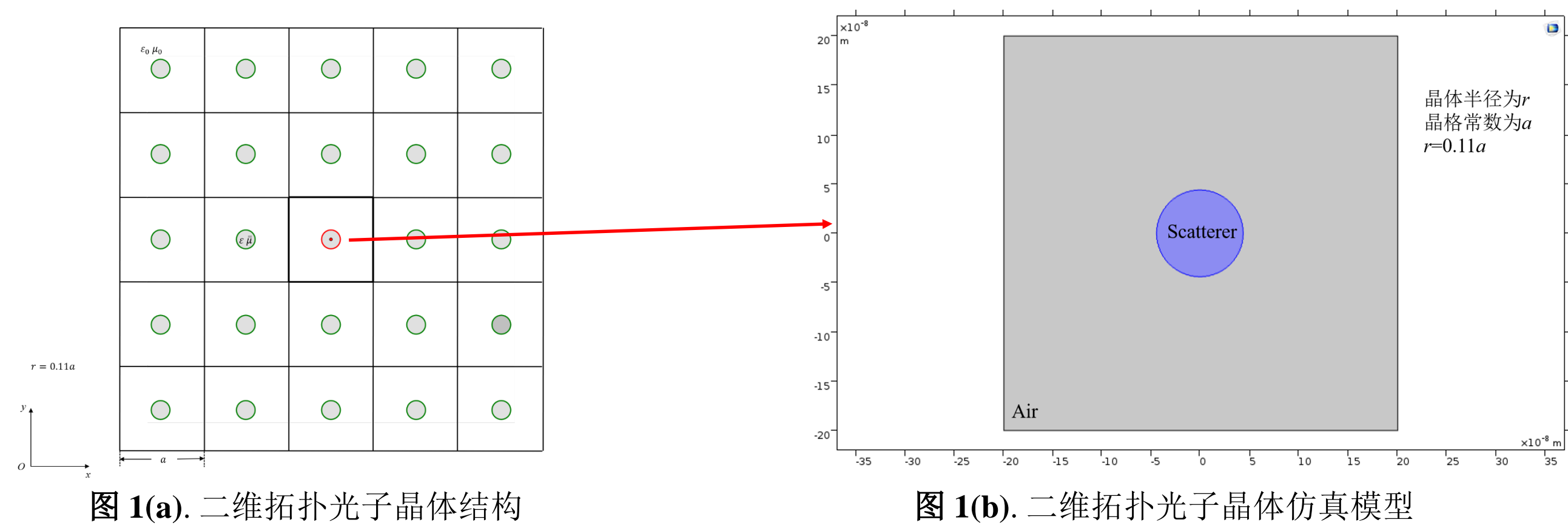


宽带格林函数方法与COMSOL用于拓扑光子绝缘体能带结构建模的比较

封朝阳¹, 谭述润^{1,*}

1.浙江大学-UIUC联合学院, 浙江, 海宁

简介及问题描述: 本文研究分析支持单向导波特性的二维拓扑光子晶体散射的新方法: 宽带格林函数方法。宽带格林函数方法结合了表面积分方程和平面波展开方法的优越性。宽带格林函数利用空间域与谱域的混合表示来计算周期性格林函数的值, 这种方法可以使结果更快的收敛。我们期望通过仿真得到图(1)所示[1]无限大周期性结构的能带图和模态场分布, 以验证宽带格林函数方法用于对拓扑光子晶体能带结构进行建模的准确性。



宽带格林函数方法: 该方法通过将表面积分方程转化为特征值问题来研究图一所示二维周期性晶体对电磁波的散射。

表面积分方程(SIE)如下式所示:

$$\begin{cases} - \int_{S_{00}} d\bar{\rho}' (\psi(\bar{\rho}') \hat{n}' \cdot \nabla' g_P^0 - g_P^0 \hat{n}' \cdot \nabla \psi(\bar{\rho}')) = 0 & \bar{\rho} \rightarrow S_{00}^- \\ \int_{S_{00}} d\bar{\rho}' (\psi_1(\bar{\rho}') \hat{n}' \cdot \nabla' g_P^1 - g_P^1 \hat{n}' \cdot \nabla \psi_1(\bar{\rho}')) = 0 & \bar{\rho} \rightarrow S_{00}^+ \end{cases}$$

其中, 宽带格林函数为

$$g_P^S(k_s, i\xi_s, \bar{k}_i; \bar{\rho}, \bar{\rho}') = g_P^S(i\xi_s, \bar{k}_i; \bar{\rho}, \bar{\rho}') + g_B^0(k_s, i\xi_s, \bar{k}_i; \bar{\rho}, \bar{\rho}')$$

$$g_P^S(i\xi_s, \bar{k}_i; \bar{\rho}, \bar{\rho}') = \sum_{\bar{R}} [\exp(i\bar{k}_i \cdot \bar{R}) g(i\xi_s; \bar{\rho}, \bar{\rho}' + \bar{R})]$$

$$g_B^0(k_s, i\xi_s, \bar{k}_i; \bar{\rho}, \bar{\rho}') = \frac{(\xi_s^2 + k_s^2)}{\Omega} \sum_{\bar{K}} \frac{\exp(i\bar{K}(\bar{\rho} - \bar{\rho}'))}{(|\bar{K}|^2 - k_s^2)(|\bar{K}|^2 + \xi_s^2)}$$

将边界条件带入表面积分方程, 便可得到以 ψ_1 , $\hat{n} \cdot \nabla \psi_1$, $\hat{t} \cdot \nabla \psi_1$ 为未知数的方程组, 将三个未知数用 roof-top 函数展开之后, $\hat{t} \cdot \nabla \psi_1$ 变成与 ψ_1 直接相关的函数, 此时的方程组只剩 ψ_1 , $\hat{n} \cdot \nabla \psi_1$ 两个未知数, 便可进行求解。

使用矩量法(MoM)求解上述方程组, 借助宽带格林函数[2, 4, 5]可将积分方程组离散化为矩阵方程, 分离变量便可得到所求解的特征值方程[3]: $\bar{P}\bar{x} = \lambda\bar{x}$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 - i\mu_0\eta\bar{C} & -\frac{\mu_0}{\bar{\mu}}\bar{B}_0 \\ \bar{A}_1 & -\bar{B}_1 \end{bmatrix} \mu_r = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \quad \lambda(k, i\xi) = \frac{1}{k^2 + \xi^2}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \varepsilon_r \mu_r \bar{D}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{R}_0^\dagger - i\mu_0\eta\bar{R}_C^\dagger & -\frac{\mu_0}{\bar{\mu}}\bar{Q}_0^\dagger \\ \varepsilon_r \mu_r \bar{R}_1^\dagger & \varepsilon_r \mu_r \bar{Q}_1^\dagger \end{bmatrix} [\bar{Z}]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{R}_0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{R}_1 \end{bmatrix}$$

上式中, 矩阵 \bar{P} 与波数 k 无关, 特征值 λ 是 k 的函数, 求出特征值之后, 便可得到图(1)所示晶体的能带图, 进而求出其模态场分布。

COMSOL仿真结果:

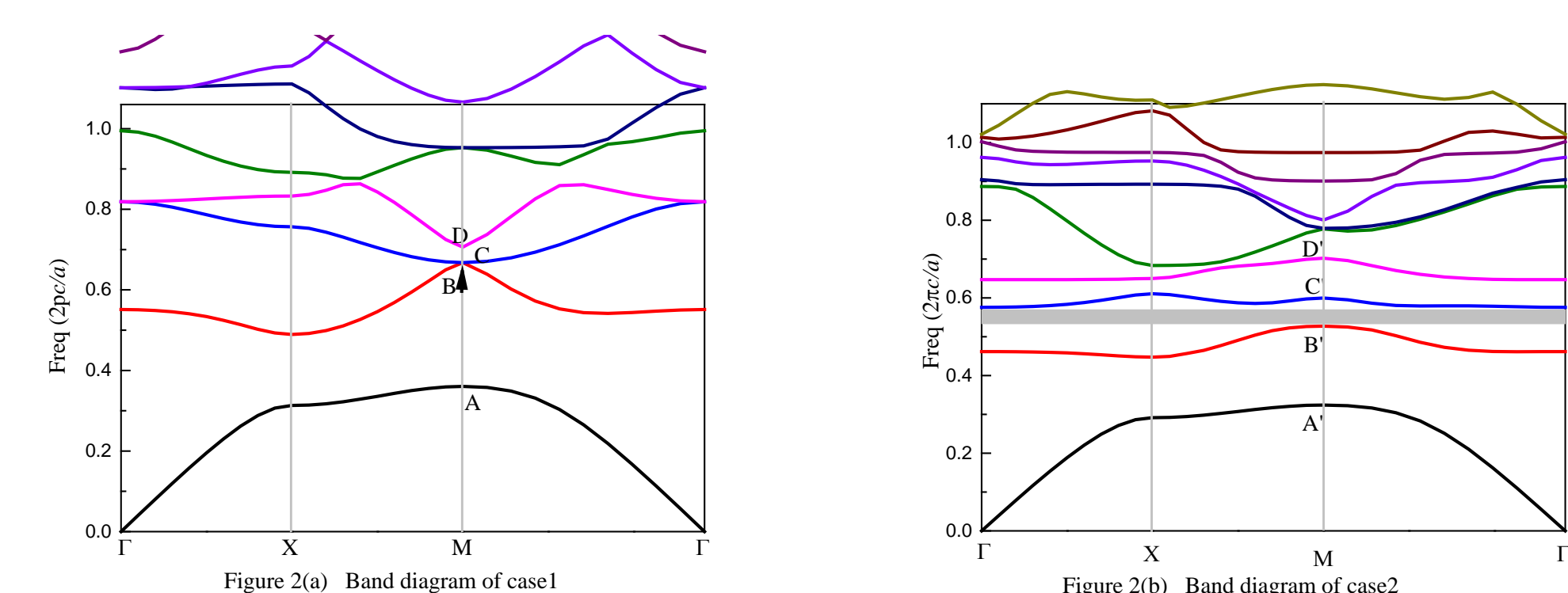
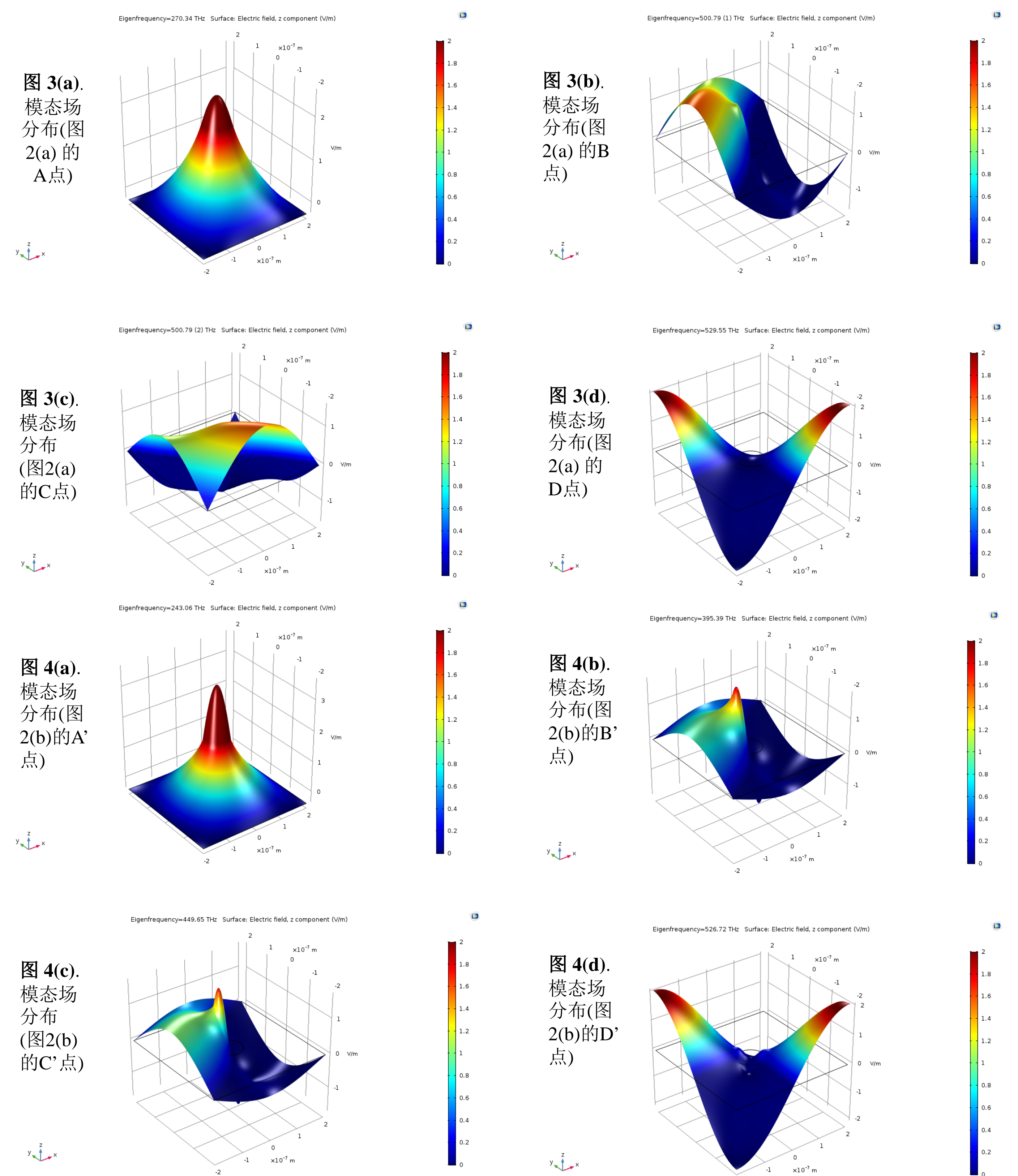


图 2(a). Case1, 自然状态下的能带图, 此时 $\varepsilon_r = 15$, $\bar{\mu}_r = 1$, $\bar{\mu} = \mu_0$, $\eta = 0$

图 2(b). Case2, 外加直流磁场时的能带图, 此时 $\varepsilon_r = 15$, $\bar{\mu}_r = \begin{bmatrix} 14 & 12.4i & 0 \\ -12.4i & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{\mu} = \frac{14^2 - 12.4^2}{14} \mu_0, \quad \eta = -\frac{12.4}{14^2 - 12.4^2} \frac{1}{\mu_0}$$

Case1与Case2的能带图仿真结果如图(2)所示, 从图中可以看出, 与case1相比, case2当中, 第二条与第三条能带之间出现了带隙, M点的兼并模态被打破, 晶体边界上在此带隙频率范围内单向导波。图(3)和图(4)所示为相应的模态场分布。



结论: (1)通过对比COMSOL仿真结果与宽带格林函数方法计算结果, 可知宽带格林函数方法可有效计算能带图和模态场。(2) COMSOL计算的能带结构可与宽带格林函数方法结合起来构造周期散射体对应的格林函数; 这样构造的格林函数可用于对有界周期结构散射问题的有效分析。

参考文献:

1. Z. Wang, Y.D. Chong, J. D. Joannopoulos, and M. Soljacic, "Reflection-free one-way edge modes in a gyromagnetic photonic crystal," *Phys. Rev. Lett.*, 100: 013905, 2008.
2. S. Tan and L. Tsang, "Efficient broadband evaluations of lattice Green's functions via imaginary wavenumber components extractions," *Prog. Electromagn. Res.*, Vol. 164, pp. 63-74, 2019.
3. L. Tsang, and S. Tan, "Calculations of band diagrams and low frequency dispersion relations of 2D periodic dielectric scatterers using broadband Green's function with low wavenumber extraction(BBGFL)," *Opt. Express*, Vol. 24, 945-965, 2016.
4. Tan, Shurun, and L. Tsang. "Green's functions, including scatterers, for photonic crystals and metamaterials." *Journal of the Optical Society of America B* 34.7(2017):1450.
5. Tan, S., and L. Tsang. "Scattering of waves by a half-space of periodic scatterers using broadband Green's function." *Optics Letters* 42.22(2017):4667-4670.